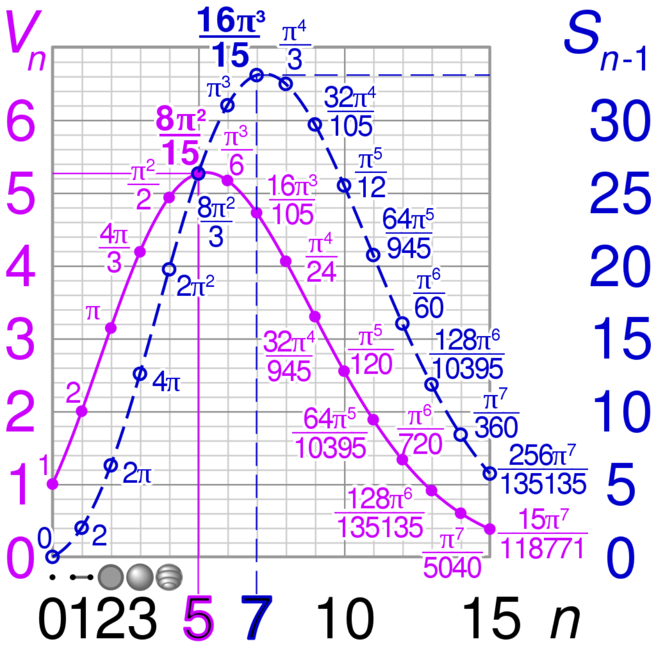
Física y Química 2° (3° 4°) ESO

The Strange Doctor

Multiverse of Madness

Аннотация

Resumen con LaTeX en español de contenidos previos para la Física y Química de 2°3°, 4° ESO: Matemáticas elementales y simbología matemática.



Índice

1 Números

¿Qué es un número? Los números son objetos matemáticos que nos permiten "contar". Esta idea intuitiva se formaliza siempre en una serie de propiedades que determina algún tipo de estructura matemática. Así podemos distinguir diferentes clases de números "normales":

Números naturales

Los números naturales es un conjunto de objetos numéricos que indican la noción básica de contaje. Se suelen simbolizar con la letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\} \tag{1}$$

Números enteros

Se denotan por la letra $\mathbb{Z}$. Incluyen los números naturales, y los números enteros negativos. Los números enteros salvo el cero se llaman enteros positivos, los números enteros negativos tampoco incluyen el cero. Los números enteros son entonces la unión de los números enteros positivos, el cero y los enteros negativos:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N} \tag{2}$$

Números racionales

Se denotan por la letrea $\mathbb{Q}$. Incluyen los números enteros como caso particular, y también todos los números que pueden escribirse como fracciones o cocientes. Los números racionales incluyen: los números decimales exactos (los números enteros son un caso particular), los números periódicos puros y los números periódicos mixtos. Los números decimales exactos, los números periódicos puros y los números periódicos mixtos se pueden escribir con una fracción generatriz.

$$\mathbb{Q} = \{-\infty, \ldots, -\frac{7}{3}, \ldots, -\frac{3}{4}, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{12}{11}, \ldots, \frac{455}{990}, \ldots, \infty\} \tag{3}$$

Fracciones generatriz de los números racionales:

- Números enteros no decimales: $\frac{\text{número}}{1}$. Ejemplo: $4 = \frac{4}{1}, -7 = \frac{-7}{1}$.
- Números enteros decimales exactos: $\frac{\text{número sin decimal}}{10\cdots}$, donde hay tantos ceros como cifras decimales. Ejemplos: $3{,}5 = \frac{35}{10}$, $-0{,}75 = -\frac{75}{100}$, $88{,}976 = \frac{88976}{1000}$. Es decir, la fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y decimal) sin coma, y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Nótese que esto incluye el caso anterior.

$$a, x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{a x_1 x_2 \cdots x_n}{1\underbrace{0\cdots0}_{n}}$$

- Números decimales periódicos puros: $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0.\overline{25} = \frac{25}{99}$, $1.\overline{58} = \frac{157}{99}$, $11.\overline{314} = \frac{11303}{999}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y periodo sin coma) menos la parte entera, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo.

$$a, \overline{x_1 \cdots x_n} = \frac{a x_1 \cdots x_n - a}{\underbrace{9\cdots9}_{n}}$$

- Números decimales periódicos mixtos. Ejemplo: $5, 17\overline{54}\ldots = \frac{(51754 - 517)}{9900} = \frac{51237}{9900}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera, anteperiodo y periodo sin coma) menos la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras diferentes tenga el anteperiodo.

Existen números que NO pueden escribirse como una fracción. Por ejemplo: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}, e, \phi, \ldots$ Estos números se llaman irracionales. Algunos son algebraicos porque son soluciones de ecuaciones del álgebra (como las raíces cuadradas, cúbicas o n-ésimas), y otros como $\pi, e, \ldots$ son trascendentes porque NO son soluciones de ninguna ecuación algebraica. Más, precisamente, un número *trascendente*, es un número es que no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales. Una ecuación polinómica es una expresión del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{4}$$

Los números irracionales, combinados con los números racionales, forman un conjunto denominado los números reales.

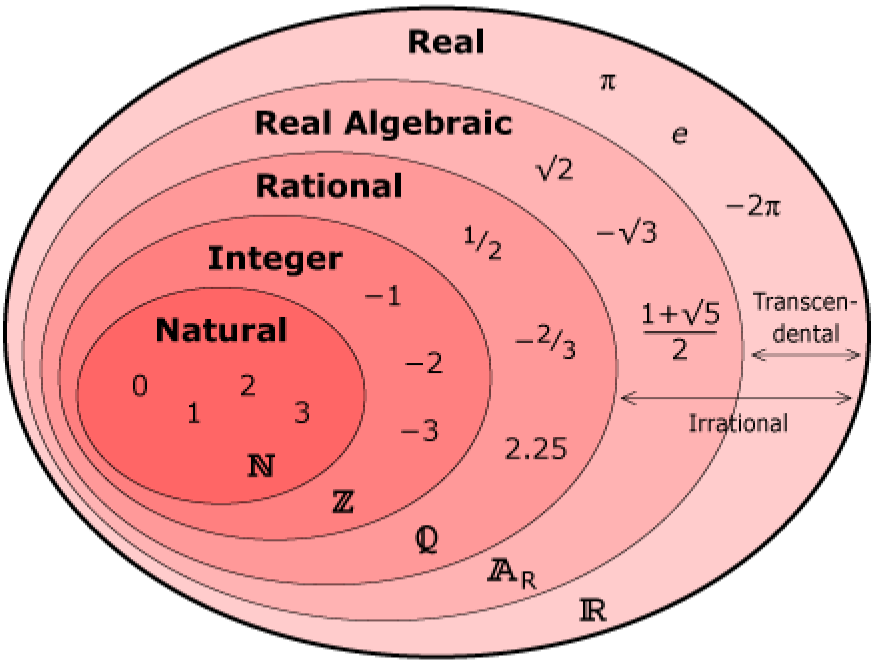
Números reales

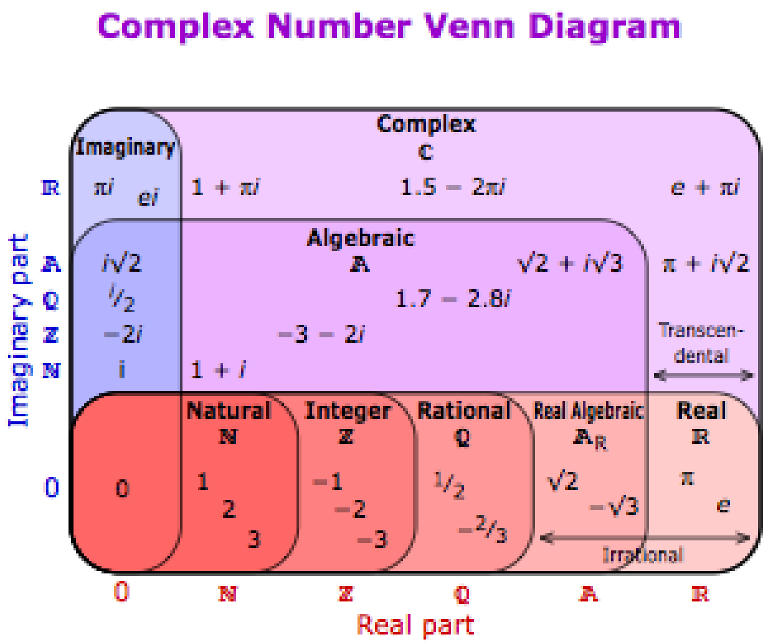
Se denominan números reales $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números racionales $\mathbb{Q}$ unidos a los números irracionales $\mathbb{I}$, esto es,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \tag{5}$$

Existen números más allá de los números reales con propiedades increibles (números imaginarios, números complejos, números hipercomplejos, cuaterniones, octoniones de Graves/números de Cayley, números de

Clifford, números de Grassmann, números p-ádicos, adeles e ideles,. . .).





$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathrm{R}} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2 Álgebra y aritmética

Con los números reales se pueden realizar TODAS las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división, y además tienen las propiedades conmutativa y distributiva. También se pueden hacer potencias y raíces. Así, se tiene que:

$$a+b=b+a \tag{6}$$
$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{7}$$
$$a+0=0+a=a \tag{8}$$
$$a+(-a)=0 \tag{9}$$
$$a\cdot b=b\cdot a \tag{10}$$
$$a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \tag{11}$$
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \tag{12}$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \tag{13}$$
$$a\cdot 1=1\cdot a=a \tag{14}$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0 \tag{15}$$
$$\frac{a}{b}=c+\frac{r}{b} \tag{16}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \tag{17}$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \tag{18}$$
$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \tag{19}$$
$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c} \tag{20}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \tag{21}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}=\cdots \tag{22}$$

Para obtener la *fracción irreducible* se usa el máximo común divisor (M.C.D.). Para dividir fracciones con diferente denominador, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) para lograr el **común denominador**. Un número primo es un número que solamente es divisible entre sí mismo y el 1. El número 1 generalmente NO se considera primo. Los números primos más pequeños son los siguientes:

$$\mathbb{P}=2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\ldots \tag{23}$$

Máximo común divisor

El máximo común divisor de una serie de números $a,b,c,\ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes elevados al menor exponente. Se representa como $M.C.D.(a,b,c,\ldots)$.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de una serie de números $a,b,c,\ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes y no comunes elevados a su correspondient mayor exponente. Se representa como $m.c.m.(a,b,c,\ldots)$.

Las sumas de varios números definen la multiplicación, y la multiplicación de varios números la potenciación:

$$\underbrace{a+\cdots+a}_{n-veces}=n\cdot a=na \tag{24}$$
$$\underbrace{a\cdots a}_{n-veces}=a^n \tag{25}$$

En esta última expresión, a se llama base, y n es el exponente. Las propiedades de las potencias (y raíces n-ésimas) son las siguientes:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{26}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{27}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{28}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{29}$$
$$a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{30}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{31}$$
$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{32}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{33}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b} \qquad \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} \tag{34}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^b}} = \sqrt[n \cdot m]{a^b} \tag{35}$$
$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \tag{36}$$
$$\text{Si } \frac{a}{n} = c + \frac{r}{n} \rightarrow \sqrt[n]{x^a} = x^c \sqrt[n]{x^r} \tag{37}$$

Regla de la multiplicación de los signos: $+ \cdot + = - \cdot - = +$, $+ \cdot - = - \cdot + = -$. Los elementos neutros de la suma y la multiplicación/divisió son el 0 y el 1, respectivamente, ya que

$$a + 0 = a - 0 = a \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a1 = 1a = \frac{a}{1} = a$$

3 Geometría

En esta sección repasaremos algunas fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

3.1 Longitudes

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan (una distancia R, llamada radio) de un punto llamado CENTRO. La longitud de una circunferencia se calcula mediante la fórmula

Longitud de una circunferencia

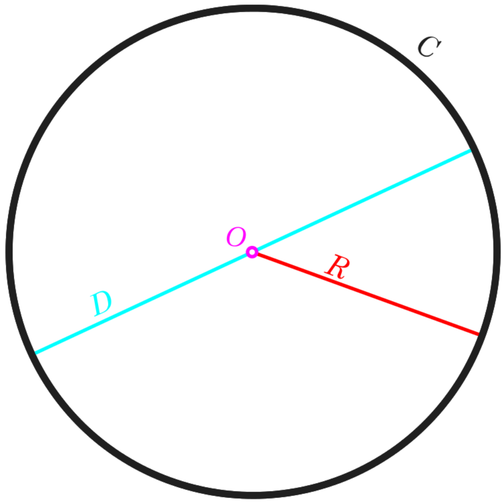
$$L_c = 2\pi R = \pi D_c \tag{38}$$

y donde R es el radio y $D_c = 2R$ es el diámetro o mayor cuerda de una circunferencia. π es por tanto el número que se obtiene al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro (dos veces el radio):

$$\boxed{\pi \equiv \frac{L_c}{D_c} = \frac{L_c}{2R} \approx 3{,}14}$$

La longitud de una circunferencia es también su *perímetro*.

Una circunferencia tiene el siguiente aspecto:



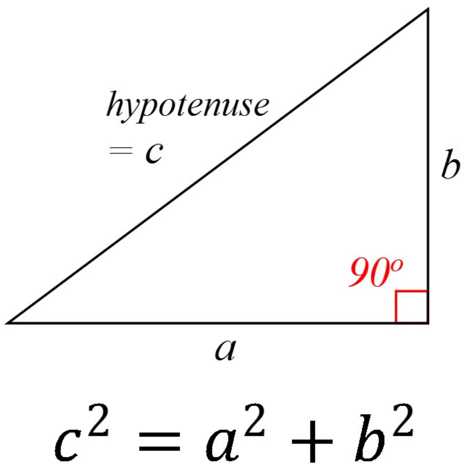
Para un polígono convexo, el perímetro es la longitud total obtenida al sumar la longitud de todos los lados. Si el polígono es regular, el perímetro es $P_{P.R.} = NL$, donde N es el número de lados, y L es la longitud del lado.

Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 + b^2 = h^2 = c^2 \tag{39}$$

donde a, b son los catetos (lados que forman el ángulo recto de 90°), y $h = c$ es la hipotenusa, lado opuesto al ángulo recto.



Un triángulo es un polígono sencillo de 3 lados (es también denominado símplex en el plano). Existen varios tipos de triángulos:

- Según los lados: triángulo equilátero (todos los lados y ángulos son iguales), triángulo isósceles (hay dos lados y ángulos iguales), y triángulos escalenos (todos los ángulos y lados son diferentes). En el plano usual, todos los triángulos tienen ángulos interiores que suman 180°. Es decir, si $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ son los ángulos interiores de un triángulo, opuestos a los lados a, b, c, la suma de esos ángulos da $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

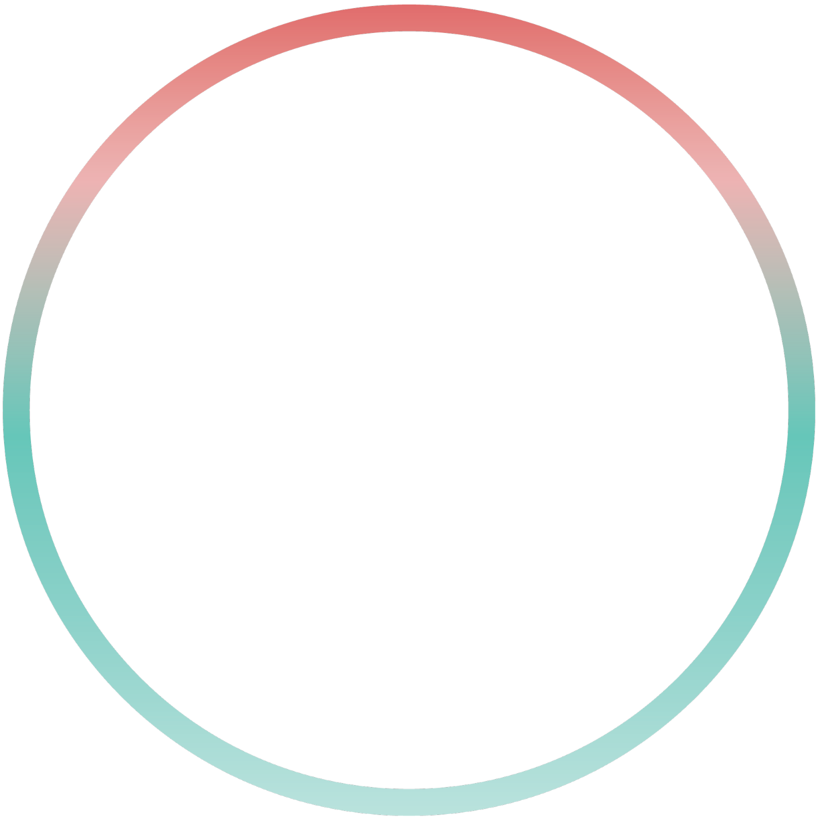
- Según los ángulos: triángulo rectángulo (un ángulo recto), triángulo acutángulo (todos los ángulos agudos, menores de 180°) y obtusángulo (con un ángulo obtuso mayor de 180°).

Los polígonos de 4 lados se llaman cuadriláteros. Existen varios tipos de cuadriláteros: cubo, rombo, romboide, trapecio y trapezoide. Algunos cuadriláteros son paralelogramos: tienen lados y ángulos paralelos dos a dos. Son paralelogramos el cubo, el rombo y el romboide. El trapecio tiene solamente un par de lados paralelos y tiene

2 no paralelos. El trapezoide no tiene lados paralelos. La suma de los 4 ángulos interiores de un cuadrilátero, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, suma 360°. Es decir $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$.

3.2 Áreas

Se llama círculo al área o espacio interior de una circunferencia.



El área del círculo se calcula mediante la expresión siguiente:

Área del círculo

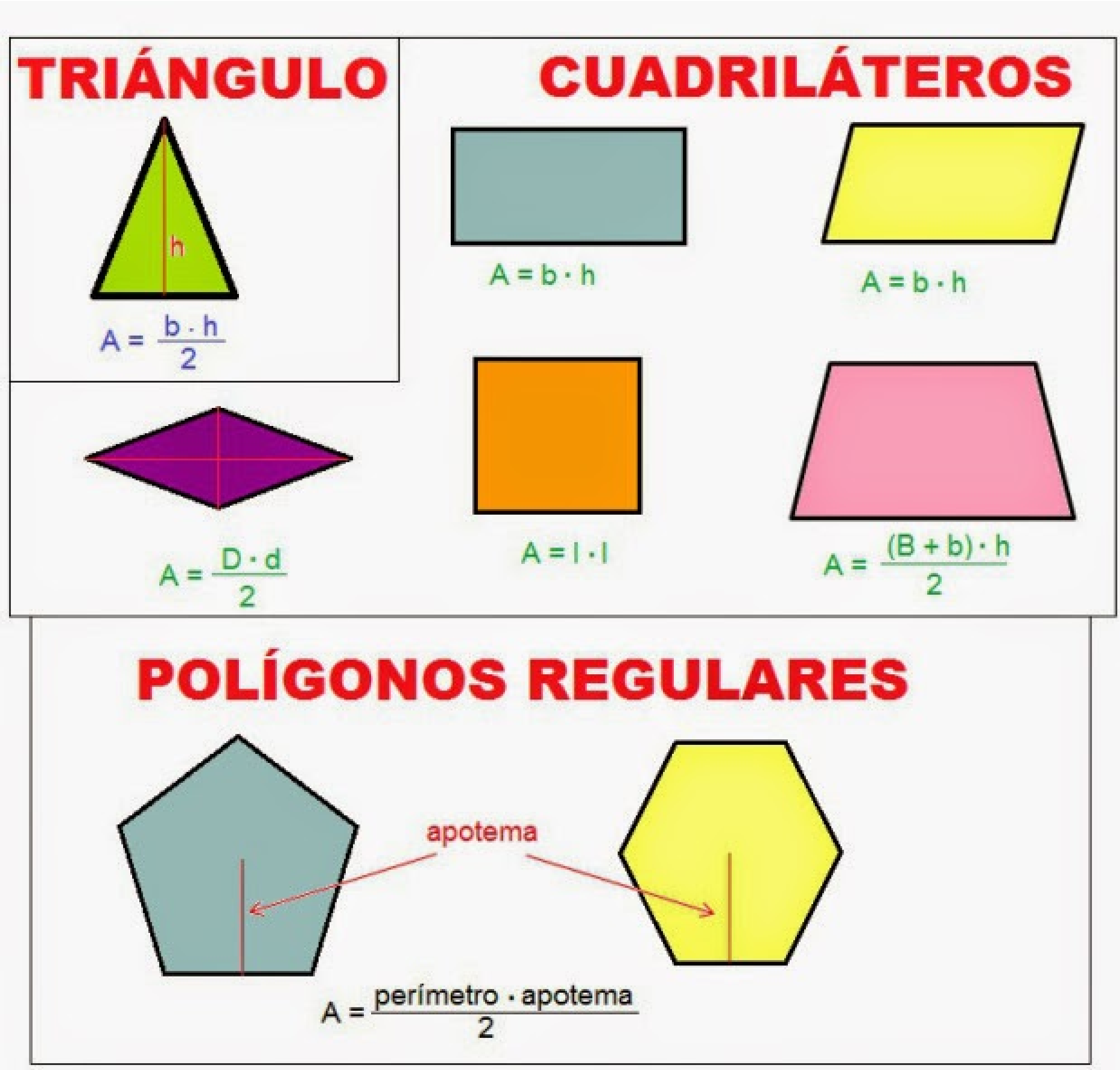
$$A_c = \pi R^2 \tag{40}$$

Para polígonos usuales, tenemos las siguientes fórmulas del área:

- Área del triángulo: $A_\Delta = \dfrac{b \cdot h}{2}$, donde b es la base y h es la altura del triángulo.
- Área del cuadrado: $A_\square = L^2 = L \cdot L$
- Área del rectángulo o del romboide: $A_R = b \cdot h$, donde b es la base, y h es la altura (height, en inglés).
- Área del rombo: $A_r = \dfrac{D \cdot d}{2}$, donde D es la diagonal mayor, y d es la diagonal menor.
- Área del trapecio isósceles: $A_T = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$, donde B es la base mayor y b es la base menor.
- Área del polígono regular de n-lados iguales a L:

  $$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

  donde $p = nL$ es el perímetro y a es el apotema (segmento que une el centreo con el punto medio de cualquier lado del polígono regular.



3.3 Volúmenes

Se llama esfera al lugar geométrico de todos los puntos en el espacio que equidistan (una distancia R llamado radio) de un punto llamado CENTRO. La ecuación de una esfera tridimensional, centrada en el punto $P(a, b, c)$, y de radio R es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

El volumen de la esfera tridimensional y su área se calculan de la forma siguiente:

Área y volumen de la esfera tridimensional

El área de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

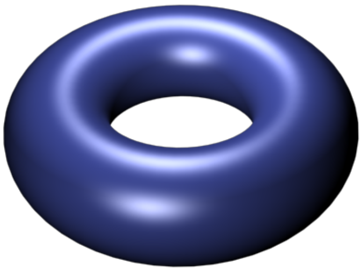
$$\boxed{A_E = 4\pi R^2} \tag{41}$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

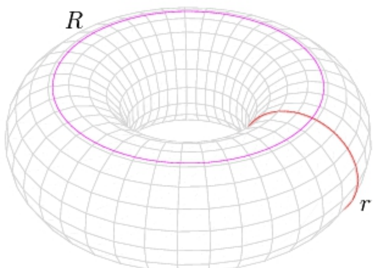
$$\boxed{V_E = \frac{4}{3}\pi R^3} \tag{42}$$

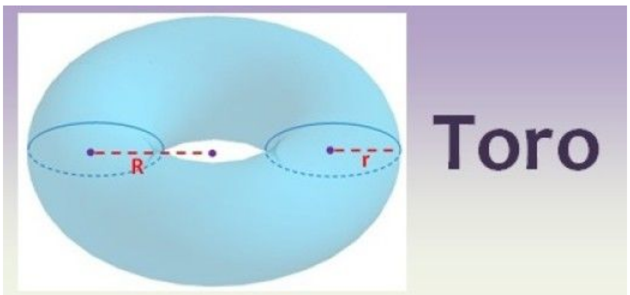
Otros volúmenes importantes:

- Prisma de lados a, b, c: $V_p = a \cdot b \cdot c = abc$
- Cubo o hexaedro (a=b=c=L): $V_{cubo} = L^3 = L \cdot L \cdot L$
- Tetraedro o símplex: $V_t = \dfrac{L^3}{6}$
- Cilindro: $V_{cilindro} = A_b \cdot h = \pi R^2 h$, donde A_b es el área de la base, R es el radio de la base, y h es la altura del cilindro.
- Pirámide: $V_P = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, donde A_b es la base y h es la altura de la pirámide.
- Cono recto: $V_{cono} = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$, donde A_b es el área de la base y R es el radio, h es la altura del cono.
- Dónut o toro: $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 R r^2$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo. El área del toro es igual a $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 R r$.



$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$





- Hiperesfera (curiosidad "complicada"), hipervolumen e hiperárea ($\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$):

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2}R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad A_n = \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

- Hipercubo o teseracto 4d: $V_4 = L^4$, el n-cubo tiene hipervolumen igual a $V_n = L^n$, donde n es el número de dimensiones del hipercubo. Para el hipertetraedro o n-símplex es una fórmula más rara que se escribe $V_t(n) = \dfrac{L^n}{n!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ es una cantidad llamada factorial de n.

4 Identidades notables

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{43}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{44}$$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{45}$$

Para otras potencias, existe una fórmula más general denominada identidad binomial. Para recordar las identidades notables y los llamados coeficientes binomiales del desarrollo de $(a+b)^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se usa el llamado triángulo de Pascal o Tartaglia:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lc}
(x+y)^0 & 1\\
(x+y)^1 & 1x + 1y\\
(x+y)^2 & 1x^2 + 2xy + 1y^2\\
(x+y)^3 & 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3\\
(x+y)^4 & 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4\\
(x+y)^5 & 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5
\end{array}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

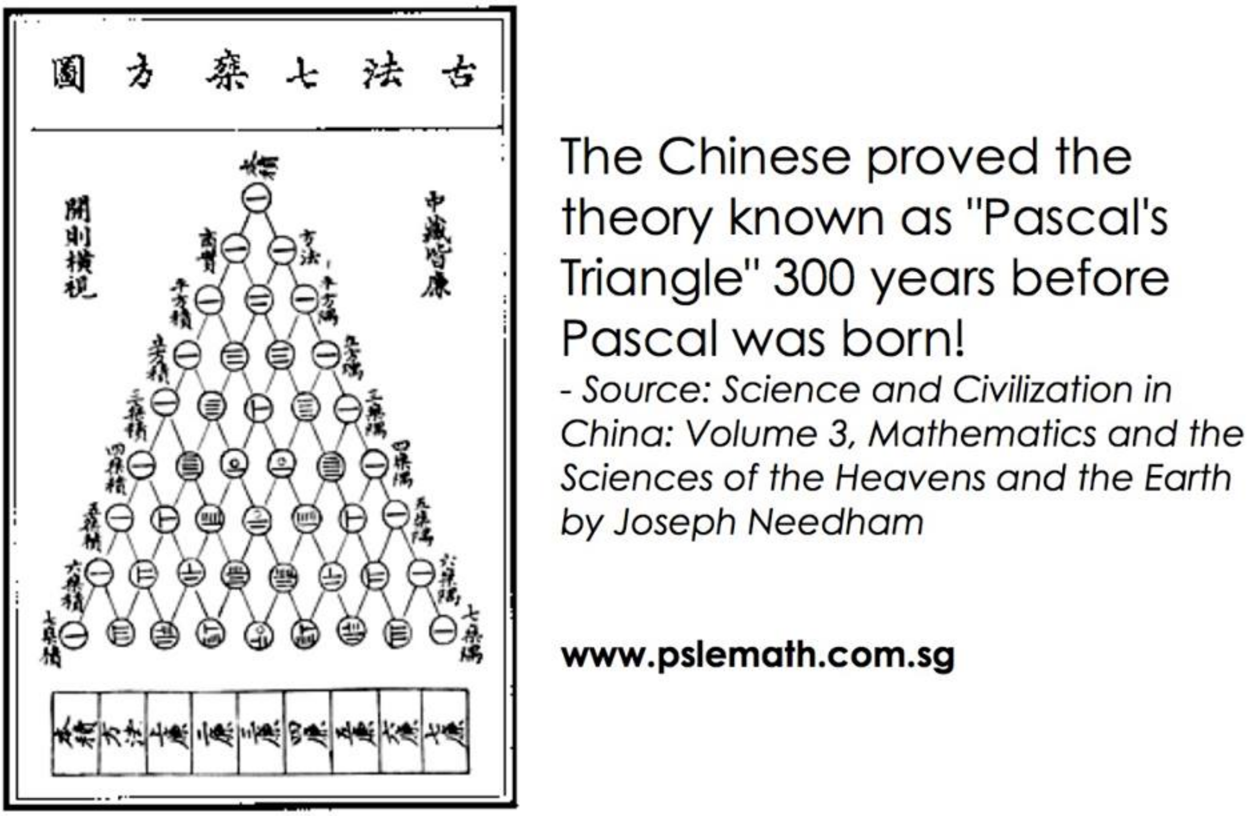
1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Este triángulo ya se conocía en China antes que en Europa:



5 Proporcionalidad

Proporcionalidad directa

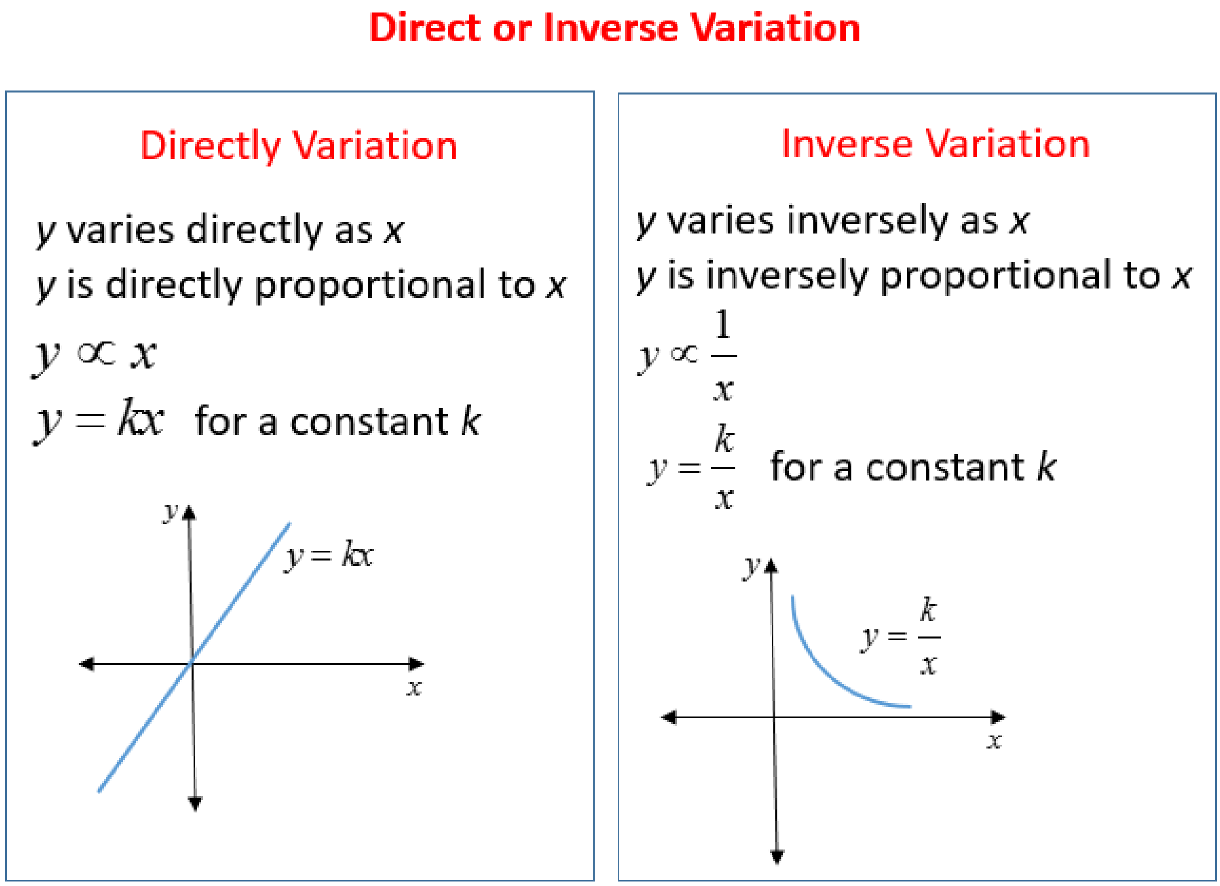
Se dice que dos cantidades(o magnitudes) X e Y son directamente proporcionales (D.P.), si y solamente si, el aumento (o disminución) de X implica el aumento (o disminución) de Y. Equivalentemente, a nivel matemático, dos magnitudes son D.P. si su cociente permanece constante, es decir,

$$\boxed{\frac{X}{Y} = k = \text{constante}} \tag{46}$$

Proporcionalidad indirecta o inversa

Se dice que dos cantidades(o magnitudes) X e Y son indirectamente o inversamente proporcionales (I.P.), si y solamente si, el aumento (o disminución) de X implica la disminución (o aumento) de Y. Equivalentemente, a nivel matemático, dos magnitudes son I.P. si su producto permanece constante, es decir,

$$\boxed{XY = X \cdot Y = k = \text{constante}} \tag{47}$$



6 Porcentajes

Tanto por ciento

El $X\,\%$ de un número N se calcula mediante la expresión:

$$X\,\% \quad \text{de N} = \frac{X \cdot N}{100}$$

Tanto por mil

El Y ‰ de un número N se calcula mediante la expresión:

$$Y‰ \quad \text{de N} = \frac{Y \cdot N}{1000}$$

Tanto por uno

El $1/Z$ o tanto por uno de un número N se calcula mediante la expresión:

$$1/Z \quad \text{de N} = \frac{N}{Z}$$

7 Ecuaciones

7.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal del tipo $ax + b = c$, si $a \neq 0$, tiene como solución única:

$$\boxed{x = \frac{c-b}{a}} \tag{48}$$

7.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión formal del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de esta ecuación tiene un fórmula general dada por

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{49}$$

y donde $\Delta = b^2 - 4ac$ es una cantidad numérica llamada *discriminante*. El tipo de solución de la ecuación cuadrática o segundo grado depende del signo del discriminante:

- Si $\Delta > 0$, hay dos raíces reales diferentes x_+, x_-.
- Si $\Delta = 0$, hay dos raíces reales iguales $x_+ = x_- = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, no hay solución real. Existirían dos soluciones complejo-conjugadas $Z_1 = x_+, Z_2 = z_- = Z_1^* = \overline{Z_1}$, en un sistema de números denominado números complejos $\mathbb{C}$, cuyo estudio está más allá de este curso elemental.

Las ecuaciones de primer grado o lineales representan líneaes rectas. Las ecuaciones de segundo grado representan curvas que son cónicas (secciones de un cono). Veamos ejemplos. Ecuación de una circunferencia de radio R centrada en (a, b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Ecuación de una parábola: $y = ax^2 + b$.
Ecuación de una hipérbola: $xy = c$.
Ecuación de una elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

En general, para una curva cuadrática plana, se tiene que:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$$

También existen curvas cúbicas, con forma general:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H = 0$$

O también curvas elípticas planas, con forma general:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

y más generalmente curvas (hiper)elípticas con $y^2 = P(x)$. Existen otras fórmulas para politopos en nd, para positroides, y también para apeirógonos, apeiroedros, o también para el amplituedro:

$$\boxed{\mathcal{M}_{n,k,L}\left[Z_a\right] = \mathrm{Vol}\left[\mathcal{A}_{n,k,L}\left[Z_a\right]\right]}$$

y

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$$

Además, conviene saber el uso de la circunferencia goniométrica o unidad, el sistema de radianes, grados sexagesimales, y el sistema de gradianes (o gones): $2\pi\ rad = 360° = 400^g$.

8 Símbolos matemáticos comunes

Generalmente, en Matemáticas o Física usamos letras de alfabetos (normalmente latino o griego, y de otros excepcionalmente, cuando es necesario) y símbolos de operadores matemáticos. Para los operadores:

$$=, \neq, \approx, \simeq, \approxeq, \sim, \propto, >, <, \geq, \leq, \gtrsim, \lesssim, \equiv, \doteq, \pm, \mp$$

$$D, \Delta x, \nabla, \Box, |x|, ||, \sum_i x_i, +, \cdot, -, :, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r}, f(t), A_{ij}, A_{i_1\cdots i_n}, \rightarrow, \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{\vec{A}}}, \overleftrightarrow{A}, \ldots$$

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}, \int dt, \int_a^b ()dt, a \cdot b, a \times b, a \wedge b, ab, \frac{a}{b}, a^x, \log_b x, \sqrt[n]{x}$$

9 Estructuras matemáticas abstractas

Las Matemáticas estudian también estructuras abstractas que los matemáticos o los físicos nombran con denominaciones que molan:

- Cuerpos.
- Anillos.
- Seminanillos.
- Grupos.
- Semigrupos.
- Conjuntos y subconjuntos.
- Categorías y functores.
- Grupoides.
- Espacios vectoriales.
- Variedades diferenciales.
- Espacios funcionales.
- Álgebras.
- Algebroides.
- Espacios tensoriales, matrices e hipermatrices.
- Grafos e hipergrafos, digrafos e hiperdigrafos.
- Matroides.
- ...

10 Alfabetos (latino, griego,...)

Anc.	Class.		Name	Corresp.	
Α	Α	α	alpha	a	1
Β	Β	β	beta	b	2
Γ	Γ	γ	gamma	g, n[1]	3
Δ	Δ	δ	delta	d	4
Ε	Ε	ε	epsilon	e	5
Ϝ	ϝ, ϛ		digamma, stigma[2]	w	6
Ζ	Ζ	ζ	zeta	z	7
Η	Η	η	eta	e	8
Θ	Θ	θ	theta	th	9
Ι	Ι	ι	iota	i, j	10
Κ	Κ	κ	kappa	k	20
Λ	Λ	λ	lambda	l	30
Μ	Μ	μ	mu	m	40

Anc.	Class.		Name	Corresp.	
Ν	Ν	ν	nu	n	50
Ξ	Ξ	ξ	xi	x	60
Ο	Ο	ο	omicron	o	70
Π	Π	π	pi	p	80
Ϙ	ϙ, ϟ		qoppa[3]	q	90
Ρ	Ρ	ρ	rho	r, rh	100
Σ	Σ	σ, ς	sigma[4]	s	200
Τ	Τ	τ	tau	t	300
	Υ	υ	upsilon	y, u[5]	400
	Φ	φ	phi	ph, f	500
	Χ	χ	chi	ch	600
	Ψ	ψ	psi	ps	700
	Ω	ω	omega	o	800
Ͳ	ϡ		sampi[6]	s	900

The regional archaic letters yot, sha and san are not included in the table. The letter san was the ancestor of sampi.
1. Only if before velars, i.e., before kappa, gamma, xi and chi.
2. 'Digamma' is the name used for the F-shaped form. It was mainly used as a letter (but also sometimes, in its lower-case form, as a number), whereas the shape and name 'stigma' is used only for the number. Both names were derived from the respective shapes; in fact, the stigma is a medieval, uncial version of the digamma. The name 'stigma' is derived from the fact that the letter looks like a sigma with a tau attached under it – though unfortunately not in all modern fonts. The original letter name, also giving its pronunciation, was 'waw'.
3. The version of qoppa that looks like a reversed and rotated z is still in occasional use in modern Greek. Unicode calls this version 'koppa'.
4. The second variant of sigma is used only at the end of words.
5. Uspilon corresponds to 'u' only as the second letter in diphthongs.
6. In older times, the letter sampi was positioned between pi and qoppa.

11 Métodos de razonamiento y pensamiento lógico-matemático

En Matemáticas, y también en Ciencias Exactas abstractas, hay varios métodos para demostrar e inferir o verificar verdades (veremos algunos de ellos en el método científico):

- Inducción o generalización. A partir de un enunciado particular, se obtiene un enunciado general.
- Deducción. A partir de unos postulados o axiomas se deducen formalmente, por pura lógica, consecuencias lógicas.
- Abducción. Es un tipo de inferencia no deductiva que infiere no una generalización como hace la inducción, sino una hipótesis sobre una estructura o proceso que explica los datos. También se le llama "razonamiento abductivo", "inferencia abductiva" o "inferencia explicativa".
- Reducción al absurdo. Es una técnica lógica que permite demostrar algo partiendo de una "verdad" asumida como hipótesis y llegando a una contradicción. Ex contradictione quod libet (E.C.Q.).

- Contraste o verificación de hipótesis empírica. Cualquier afirmación, puede en el fondo ser contrastada “experimentalmente”.

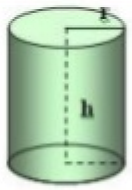
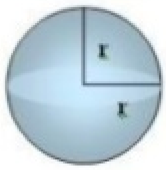
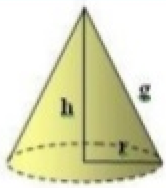
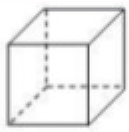
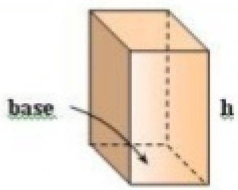
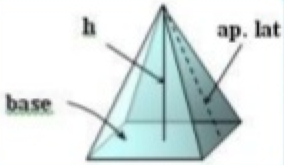
- Análisis de datos. Cualquier afirmación teórica conlleva o puede implicar cierto comportamiento en los datos. Hay métodos estadísticos para estudiar estos datos. Además, hoy día tenemos la computación, no solamente algoritmos humanos, la AI (IA, artificial intelligence/inteligencia artificial), y las Ciencias de Grandes Datos (Big Data), aprendizaje de máquinas (Machine Learning), y otras técnicas poderosas basadas en métodos matemáticos abstractos avanzados de la teoría de la probabilidad, denominados métodos bayesianos, que complementan los más tradicionales métodos frecuentistas.

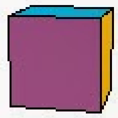
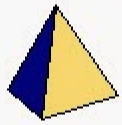
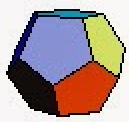
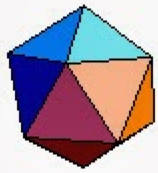
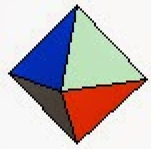
El razonamiento humano normal funciona mediante lógica booleana o bivaluada. Sin embargo, existen lógicas ternarias, multivaluadas, o incluso lógica cuántica.

A Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.

ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Prisma		A = (perim. base • h) + 2 • area base	V = área base □ h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area bas}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6\,a^2$	$\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}\,a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}\,a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}\,a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,a$

Para una $N-$esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \tag{50}$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{51}$$

$$V_N(R) = R\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+}{2}+1\right)} V_{N-1}(R) \tag{52}$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} R^N \tag{53}$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \tag{54}$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \tag{55}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \tag{56}$$

$$V_0(R) = 1, \tag{57}$$

$$A_0(R) = 2, \tag{58}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \tag{59}$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \tag{60}$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad si \quad n \to \infty \tag{61}$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N, R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} R^N \tag{62}$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) = \log \pi + 2 \log R \tag{63}$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\log V(N, R)\right) = \frac{\log \pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) \tag{64}$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p. Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{65}$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right) R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right) R\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del “taxicab”, o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \tag{66}$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \tag{67}$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i, definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1,\ldots,p_n} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \cdots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)}$$

B Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es $\mathbb{C}$, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación de n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas. . .

B.1 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c-b}{a}} \tag{68}$$

B.2 Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida "en general". Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \dfrac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

B.3 Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

B.3.1 Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a “discriminant” whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the “irreducible case” of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- “Eliminate the square term” by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution x = 1 in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

B.3.2 Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2 d - 2b^3}{54a^3}$$

B.3.3 Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2 y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2 y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2 y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2 d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$

$$ST = -Q$$

$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that m+nm+nm+n must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$

$$y_2 = Sw + Tw^2$$

$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions.
Q.E.D.

B.3.4 Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q, R, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

B.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

B.4.1 Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

B.4.2 Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.
- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.
- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2. Esto da dos soluciones:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada z, z_1, z_2, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

B.4.3 General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \tag{69}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \tag{70}$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \tag{71}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2 d}{8a^3} \tag{72}$$

and where

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\,p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{73}$$

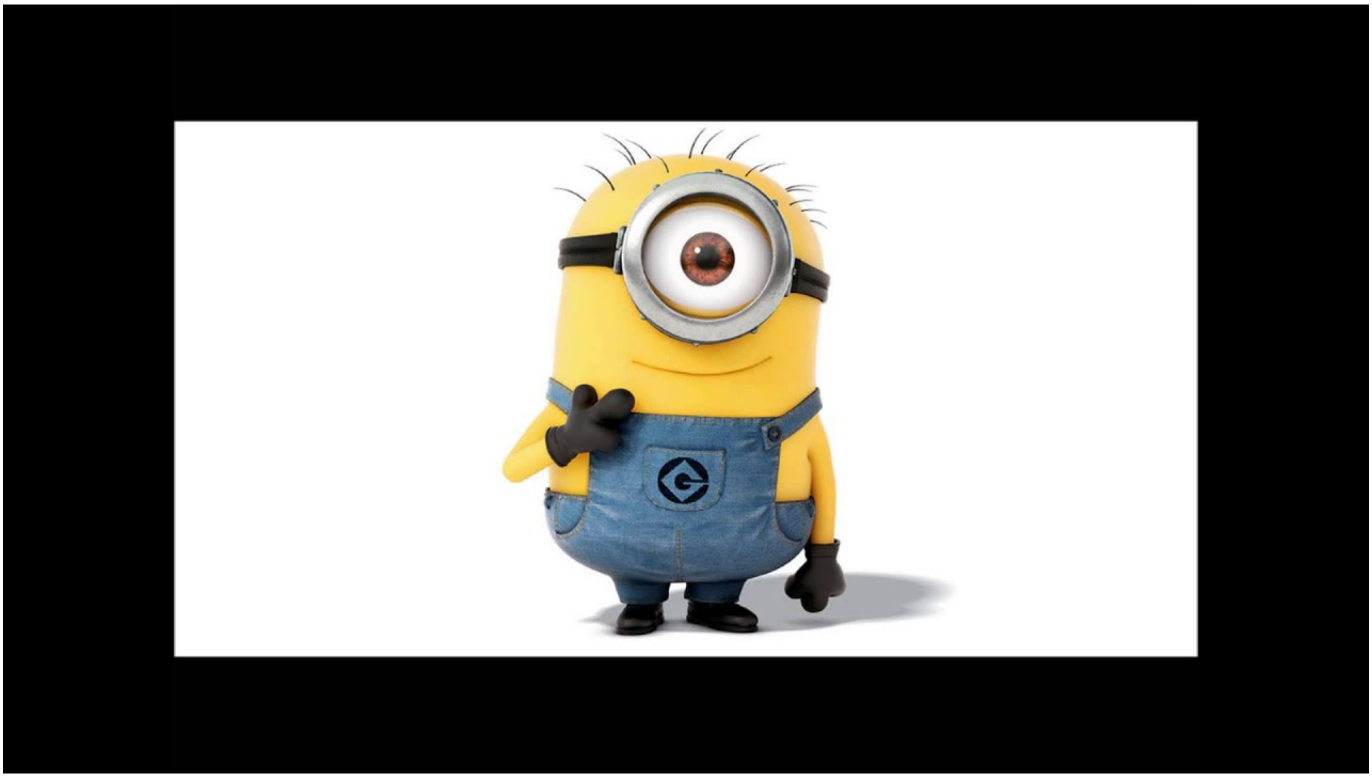
$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \tag{74}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \tag{75}$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2 e + 27ad^2 - 72ace \tag{76}$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for "Q", any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.



Планета есть колыбель разума, но нельзя вечно жить в колыбели.

Doctor Who?

ρΔΞΘΣШЖЮ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\blacklozenge\blacklozenge\rangle\right) \qquad \oint_{\partial\Sigma}\Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$