EL PRODUCTO VECTORIAL

Juan Francisco González Hernández

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.
- Conocer a los personajes históricos involucrados en la creación de este producto tan "rarito".

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.
- Conocer a los personajes históricos involucrados en la creación de este producto tan "rarito".
- Ver algunas de sus aplicaciones en Matemáticas y Física.

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.
- Conocer a los personajes históricos involucrados en la creación de este producto tan “rarito”.
- Ver algunas de sus aplicaciones en Matemáticas y Física. Después de todo no es tan raro (R.A.E.)

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.
- Conocer a los personajes históricos involucrados en la creación de este producto tan "rarito".
- Ver algunas de sus aplicaciones en Matemáticas y Física. Después de todo no es tan raro (R.A.E.)
- Elucidar y comentar algunas de sus generalizaciones.

Objetivos

- Estudiar la Historia del producto vectorial, el inicio del análisis vectorial y el álgebra abstracta moderna.
- Conocer a los personajes históricos involucrados en la creación de este producto tan "rarito".
- Ver algunas de sus aplicaciones en Matemáticas y Física. Después de todo no es tan raro (R.A.E.)
- Elucidar y comentar algunas de sus generalizaciones.
- Exponer algunos trucos y metodologás pedagógicas para alumnos de E.S.O. y Bachillerato, proponiendo algunas soluciones y correcciones a errores comunes.

Motivaciones y orientaciones

1. Hacer el producto vectorial más simpático y agradable.

Motivaciones y orientaciones

1. Hacer el producto vectorial más simpático y agradable.
   Después de todo es una $\times$

Motivaciones y orientaciones

1. Hacer el producto vectorial más simpático y agradable.
   Después de todo es una $\times$
2. Aprender a explicar conceptos matemáticos sutiles.

Motivaciones y orientaciones

1. Hacer el producto vectorial más simpático y agradable.
   Después de todo es una $\times$
2. Aprender a explicar conceptos matemáticos sutiles.
3. Resumen.

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es

a partir de dos vectores

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de
a partir de dos vectores

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$

Vector

Entonces, ¿qué rayos es un vector? ¡Buena pregunta!

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$

Vector

Entonces, ¿qué rayos es un vector? ¡Buena pregunta!

Un Matemático diría...

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$

Vector

Entonces, ¿qué rayos es un vector? ¡Buena pregunta!

Un Matemático diría... Un Físico diría...

¿Qué es el producto vectorial?

Producto vectorial

El producto vectorial es una manera de fabricar cierto tipo de (pseudo)-vector a partir de dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$

Vector

Entonces, ¿qué rayos es un vector? ¡Buena pregunta!

Un Matemático diría... Un Físico diría... Una persona de la calle diría...

Sir W.R.Hamilton

Sobre W.R.Hamilton 1805-1866

Prodigio desde muy joven,

Sir W.R.Hamilton

Sobre W.R.Hamilton 1805-1866

Prodigio desde muy joven, “Este joven, no voy a decir que será, sino es el primer matemático de su edad” Brinkley, Royal Irish Academy President

Sir W.R.Hamilton

Sobre W.R.Hamilton 1805-1866

Prodigio desde muy joven, "Este joven, no voy a decir que será, sino es el primer matemático de su edad" Brinkley, Royal Irish Academy President

Problema(Hamilton)

Habiendo axiomatizado los números complejos en el plano: ¿Existe una teoría de ternas en el espacio?

Sir W.R.Hamilton

Sobre W.R.Hamilton 1805-1866

Prodigio desde muy joven, “Este joven, no voy a decir que será, sino es el primer matemático de su edad” Brinkley, Royal Irish Academy President

Problema(Hamilton)

Habiendo axiomatizado los números complejos en el plano: ¿Existe una teoría de ternas en el espacio?

$$V = a + bi + cj, \text{con} \qquad i^2 = j^2 = -1$$

Hamilton, el puente y los cuaternios

"Papá, ¿puedes multiplicar ternas?" Hamilton: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas"

Hamilton, el puente y los cuaternios

"Papá, ¿puedes multiplicar ternas?" Hamilton: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas"

Hamilton encuentra finalmente la respuesta mientras da un paseo por el Brougham Bridge

Hamilton, el puente y los cuaterniones

"Papá, ¿puedes multiplicar ternas?" Hamilton: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas"

Ha encontrado los cuaternios

Hamilton, el puente y los cuaterníos

“Papá, ¿puedes multiplicar ternas?” Hamilton: “No, sólo puedo sumarlas y restarlas”

Hamilton, el puente y los cuaternios

"Papá, ¿puedes multiplicar ternas?" Hamilton: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas"

$$Q = a + bi + cj + dk$$

Hamilton, el puente y los cuaternios

"Papá, ¿puedes multiplicar ternas?" Hamilton: "No, sólo puedo sumarlas y restarlas"

Cuaternios y producto vectorial(I)

Parte escalar, parte pura

Un cuaternio puede imaginarse como la suma de dos partes diferentes, una escalar o real y una parte imaginaria o pura llamada vector -del latín veher, dirigir.

$$Q = \quad + \qquad\qquad =$$

Cuaternios y producto vectorial(I)

Parte escalar, parte pura

Un cuaternio puede imaginarse como la suma de dos partes diferentes, una escalar o real y una parte imaginaria o pura llamada vector -del latín veher, dirigir.

$$Q = a + \qquad\qquad =$$

Cuaternios y producto vectorial(I)

Parte escalar, parte pura

Un cuaternio puede imaginarse como la suma de dos partes diferentes, una escalar o real y una parte imaginaria o pura llamada vector -del latín veher, dirigir.

$$Q = a + bi + cj + dk =$$

Cuaternios y producto vectorial(I)

Parte escalar, parte pura

Un cuaternio puede imaginarse como la suma de dos partes diferentes, una escalar o real y una parte imaginaria o pura llamada vector -del latín veher, dirigir.

$$Q = a + bi + cj + dk = Re(Q) + Pu(Q)$$

Cuaternios y producto vectorial(II)

Producto de dos cuaternios vectoriales

Resultado: la multiplicación de dos cuaternios puros es igual al valor del producto vectorial en el espacio tridimensional (De hecho es la definición)

Cuaternios y producto vectorial(II)

Producto de dos cuaternios vectoriales

Resultado: la multiplicación de dos cuaternios puros es igual al valor del producto vectorial en el espacio tridimensional (De hecho es la definición)

$$q_1 q_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, i + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, k -$$

Cuaternios y producto vectorial(II)

Producto de dos cuaternios vectoriales

Resultado: la multiplicación de dos cuaternios puros es igual al valor del producto vectorial en el espacio tridimensional (De hecho es la definición)

$$-\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right)$$

Cuaternios y producto vectorial(II)

Producto de dos cuaternios vectoriales

Resultado: la multiplicación de dos cuaternios puros es igual al valor del producto vectorial en el espacio tridimensional (De hecho es la definición)

Forma compacta del producto de dos cuaternios puros:

$$q_1 q_2 = a \times b - a \cdot b$$

Cuaternios y producto vectorial(II)

Producto de dos cuaternios vectoriales

Resultado: la multiplicación de dos cuaternios puros es igual al valor del producto vectorial en el espacio tridimensional (De hecho es la definición)

$$\mathbf{Q} = (A, \mathbf{X})\,(a, \mathbf{Y}) = (Aa - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}, A\mathbf{Y} + a\mathbf{X} + \mathbf{X} \times \mathbf{Y})$$

Evolución

- Graves manda una carta a Hamilton sobre las “octavas” (números de Cayley)

Evolución

- Graves manda una carta a Hamilton sobre las “octavas” (números de Cayley)
- Heaviside, Gibbs y Wilson popularizan el análisis vectorial. Los cuaternios son estrafalarios.

Evolución

- Graves manda una carta a Hamilton sobre las “octavas” (números de Cayley)
- Heaviside, Gibbs y Wilson popularizan el análisis vectorial. Los cuaternios son estrafalarios.
- Pugna entre corrientes cuaternionista y vectorialista. Ganan los vectores (cuaternios imaginarios)

Evolución

- Graves manda una carta a Hamilton sobre las "octavas" (números de Cayley)
- Heaviside, Gibbs y Wilson popularizan el análisis vectorial. Los cuaternios son estrafalarios.
- Pugna entre corrientes cuaternionista y vectorialista. Ganan los vectores (cuaternios imaginarios)
- ¿Pueden sumarse peras y fresas?

Evolución

- Graves manda una carta a Hamilton sobre las "octavas" (números de Cayley)
- Heaviside, Gibbs y Wilson popularizan el análisis vectorial. Los cuaternios son estrafalarios.
- Pugna entre corrientes cuaternionista y vectorialista. Ganan los vectores (cuaternios imaginarios)
- ¿Pueden sumarse peras y fresas?
- Desarrollo a dimensiones superiores por Grassmann y Clifford (aparentemente innecesario para técnicos e ingenieros)

Producto vectorial hoy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

Producto vectorial hoy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (3)$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (4)$$

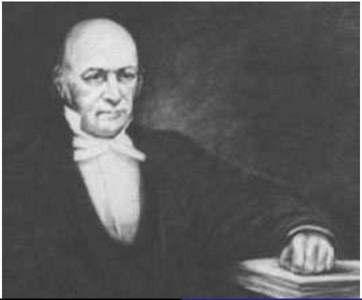
$$C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (5)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (6)$$

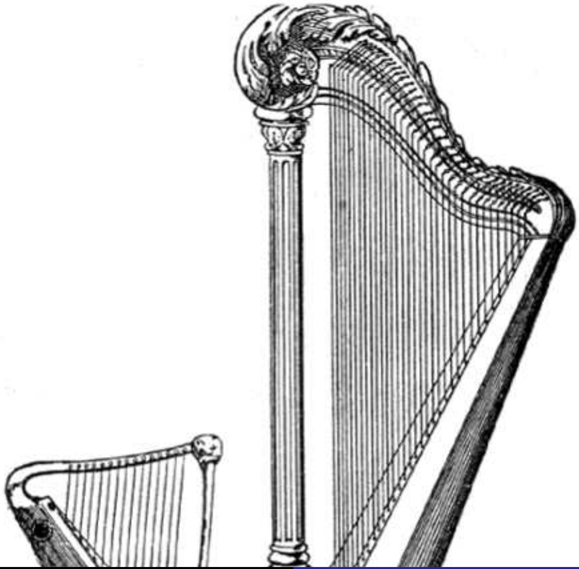
Hamilton ayer

Hamilton ayer

Hamilton ayer

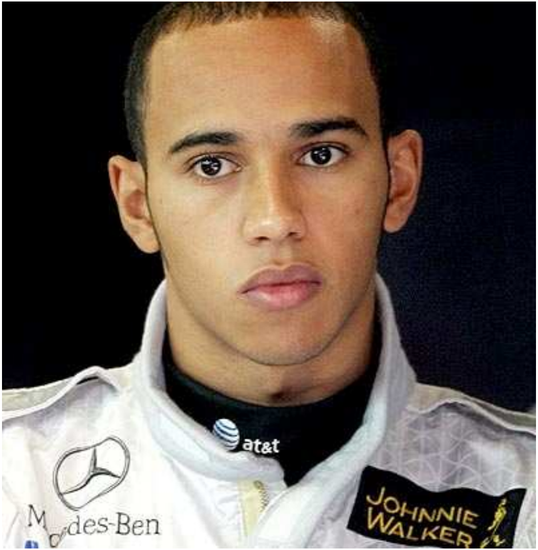


Nabla



Hamilton hoy día

Hamilton hoy día



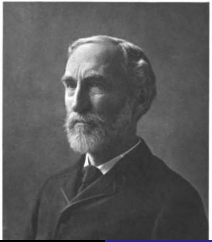
Detalles del puente en la actualidad

Detalles del puente en la actualidad

Otros personajes mencionados

Otros personajes mencionados

Otros personajes mencionados



Cálculo de superficies

$$\textbf{Área}\square_{AB} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

Teorema de Stokes

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Lie y el producto vectorial

$$\Upsilon : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{A}\left(M_{3\times 3}\right)$$

$$\vec{a}\times \longmapsto \Upsilon\left(\vec{a}\times\right) = A \in \mathfrak{so}(3)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Otras aplicaciones

Las esferas en dimensiones 0,1,3,7 son paralelizables, en términos matemáticos son una fibra, y admiten lo que se llaman una fibración de Hopf. Esto tiene consecuencias aritméticas, como el teorema de los 2, 4 y 8 cuadrados, o también sorprendentes aplicaciones en Topología y Teoría de Grafos. De hecho, L.H.Kauffman ha probado que el teorema de los 4 colores es equivalente a un problema algebraico de asociar en multipletes no ambiguos n-uplas de productos vectoriales tridimensionales.

Dos ejemplos típicos y uno poco conocido

Otras: Sistemas de referencia no inerciales, redes de Bravais, expresión de la fuerza de Lorentz y vector de Poynting, ley de Biot-Savart, ecuaciones de Maxwell, rotacional y vorticidad.

Dos ejemplos típicos y uno poco conocido

$$\textbf{Momento angular} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Otras: Sistemas de referencia no inerciales, redes de Bravais, expresión de la fuerza de Lorentz y vector de Poynting, ley de Biot-Savart, ecuaciones de Maxwell, rotacional y vorticidad.

Dos ejemplos típicos y uno poco conocido

$$\textbf{Torque} = \textbf{Momento de una fuerza} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Otras: Sistemas de referencia no inerciales, redes de Bravais, expresión de la fuerza de Lorentz y vector de Poynting, ley de Biot-Savart, ecuaciones de Maxwell, rotacional y vorticidad.

Dos ejemplos típicos y uno poco conocido

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$$

Otras: Sistemas de referencia no inerciales, redes de Bravais, expresión de la fuerza de Lorentz y vector de Poynting, ley de Biot-Savart, ecuaciones de Maxwell, rotacional y vorticidad.

Las generalizaciones son posibles...pero excepcionales y sofisticadas

1. Álgebras normadas en D=1, 2, 4, 8

Las generalizaciones son posibles...pero excepcionales y sofisticadas

1. Álgebras normadas en D=1, 2, 4, 8
2. Producto exterior y Álgebra de Grassmann

Las generalizaciones son posibles...pero excepcionales y sofisticadas

1. Álgebras normadas en D=1, 2, 4, 8
2. Producto exterior y Álgebra de Grassmann
3. Forma de volumen y dual de Hodge

Las generalizaciones son posibles...pero excepcionales y sofisticadas

1. Álgebras normadas en D=1, 2, 4, 8
2. Producto exterior y Álgebra de Grassmann
3. Forma de volumen y dual de Hodge
4. Álgebras de Clifford

La regla del tornillo y del sacacorchos

Tornillo-Sacacorchos — **Demasiados cacharros**

La dirección y sentido del producto vectorial son las de un tornillo o sacacorchos, que gira del primer vector al segundo por el camino más corto.

Problemas

No siempre hay tornillos y sacacorchos en clase. Se enfatiza el aspecto manual de la operación. Queremos potenciar las capacidades cognitivas, no tanto las psicomotoras.

La regla de la mano derecha

Mano derecha — **Demasiadas manos**

Dir. y sent. del producto vectorial se obtienen con el pulgar de la mano derecha, orientando correctamente los dedos índice y corazón de forma que recaigan correctamente en los vectores operando.

Problemas

Zurdos, diestros, ambidiestros; y regla de la mano izquierda: horroroso.

La técnica e intuición algebraicas

- La mejor manera de aprender el producto vectorial es con recursos algebraicos.
- El motivo es que el producto es naturalmente un "subproducto" algebraico.
- Usar preferentemente el determinante, Sarrus y pensar espacialmente. Truco de yuxtaponer columnas para evitar errores de signo.
- Palabras mágicas XYZZY y sus permutaciones naturales. (Bibidi-Babidi-Bu)
- Uso de diagramas mnemotécnicos.
- Para alumnos avanzados o curiosos: mostrar historia y truco de cuaternios.

Razones de las dificultades del producto vectorial

- No es conmutativo, como sus parientes: las matrices.

Razones de las dificultades del producto vectorial

- No es conmutativo, como sus parientes: las matrices.
- No es asociativo, relacionado con los grupos de Lie. Vaya bicho

Razones de las dificultades del producto vectorial

- No es conmutativo, como sus parientes: las matrices.
- No es asociativo, relacionado con los grupos de Lie. Vaya bicho
- Su naturaleza real es tetradimensional, por eso es tan raro en el espacio tridimensional. Vinculado a estructuras algebraicas excepcionales.

Razones de las dificultades del producto vectorial

- No es conmutativo, como sus parientes: las matrices.
- No es asociativo, relacionado con los grupos de Lie. Vaya bicho
- Su naturaleza real es tetradimensional, por eso es tan raro en el espacio tridimensional. Vinculado a estructuras algebraicas excepcionales.
- ¿Relatividad algebraica?

Mapa conceptual final