Dualidad electromagnética: una breve introducción

Juan F. González Hernández

1. Carga, corriente y densidad magnéticas

Si completamos las ecuaciones de Maxwell de forma que admita monopolos magnéticos (cargas magnéticas puntuales), hay que introducir también la densidad de corriente magnética $\vec{j}_m = \vec{j}_m(t, x^i)$ y la densidad monopolar $\rho_m = \rho_m(t, x^i)$. De esta forma

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e/\varepsilon_0 \tag{1}$$
$$\nabla \cdot B = \mu_0 \rho_m \tag{2}$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j}_m \tag{3}$$
$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_e \tag{4}$$

Tomamos la divergencia en la tercera ecuación

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left(-\mu_0 \vec{j}_m \right) \tag{5}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{j}_m \tag{6}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} - \mu_0 \nabla \cdot \vec{j}_m \tag{7}$$
$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} - \mu_0 \nabla \cdot \vec{j}_m \tag{8}$$

ya que la divergencia de un rotacional es cero (de la condición cohomológica $d^2 = 0$). Usando la ecuación segunda de Maxwell (Ley de Gauss magnética con monopolo), tenemos

$$\nabla \cdot \vec{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

que no es otra cosa que la ecuación de continuidad para la corriente $\vec{j}_m$ y densidad ρ_m. Tiene la misma forma que la correspondiente eléctrica conocida en cursos estándar de electromagnetismo:

$$\nabla \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

simplemente cambiando la etiqueta magnética por la eléctrica (o viceversa), se obtiene una de otra. Es la esencia de la denominada *dualidad electromagnética*. De hecho las ecuaciones (1), (2),(3),(4) son invariantes bajo las transformaciones de dualidad siguientes:

$$\vec{E} \to \vec{B} \tag{9}$$

$$c\vec{B} \to -\vec{E} \tag{10}$$

$$c\vec{\rho_e} \to \rho_m \tag{11}$$

$$\rho_m \to -c\rho_e \tag{12}$$

$$c\vec{j}_e \to \vec{j}_m \tag{13}$$

$$\vec{j}_m \to -c\vec{j}_e \tag{14}$$

De hecho, estas transformaciones discretas no son más que un caso particular de un conjunto más general de transformaciones de dualidad electromagnética, que rota las cargas eléctricas y magnéticas, las densidades y sus corrientes respectivas[1]:

$$\star\vec{E} = \vec{E}\cos\theta + c\vec{B}\sin\theta \tag{15}$$

$$c\star\vec{B} = -\vec{E}\sin\theta + c\vec{B}\cos\theta \tag{16}$$

$$c\star\rho_e = c\rho_e\cos\theta + \rho_m\sin\theta \tag{17}$$

$$\star\rho_m = -c\rho_e\sin\theta + \rho_m\cos\theta \tag{18}$$

$$c\star\vec{j}_e = c\vec{j}_e\cos\theta + \vec{j}_m\sin\theta \tag{19}$$

$$\star\vec{j}_m = -c\vec{j}_e\sin\theta + \vec{j}_m\cos\theta \tag{20}$$

o en formato matricial

$$\star\begin{pmatrix}\vec{E}\\ c\vec{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ c\vec{B}\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\star\begin{pmatrix}c\rho_e\\ \rho_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\rho_e\\ \rho_m\end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\star\begin{pmatrix}c\vec{j}_e\\ \vec{j}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\vec{j}_e\\ \vec{j}_m\end{pmatrix} \tag{23}$$

Las transformaciones de dualidad discreta no son más que el caso $\theta = \pi/2$ en las ecuaciones (21)-(23)(o en (15)-(20)). Nótese que es una simetría curiosa que relaciona vectores, $\vec{E}, \vec{j}_e$, con pseudovectores $\vec{B}, \vec{j}_m$, mientras que ρ_e es un escalar, y de alguna forma ρ_m, θ son pseudoescalares. El ángulo θ parametriza la dualidad y es una suerte de rotación en el espacio de campos, y suele denominarse ángulo de mezcla del espacio de carga abstracto bidimensional real o ángulo de dualidad (en forma compleja puede relacionarse el grupo $SO(2)$ con $U(1)$, como es bien conocido en teoría de grupos).

[1] Más generalmente, en el lenguaje de formas diferenciales, se generaliza usando el operador estrella de Hodge.

2. La ley de Faraday como conservación de la carga magnética

Supongamos que postulamos la indestructibilidad de la carga magnética lo siguiente: "La carga magnética aislada existe en algún lugar del universo, y es es indestructible de igual modo que existe y es indestructible la carga eléctrica, mediante una ecuación de continuidad".

Las ecuaciones de continuidad de la sección anterior, y las ecuaciones de Maxwell simetrizadas mediante dualidad "a la Dirac", peermiten derivar la ley de inducción de Faraday, a priori una ley totalmente empírica y sin fundamento teórico alguno. Asumiendo la existencia de cargas magnéticas, se sugiere una ley de Coulomb para campos magnéticos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \rho_m(x')\frac{\vec{x}-\vec{x}' d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \rho_m(x')\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

Si existen corrientes magnéticas, también habrá una ley de Biot-Savart para campos eléctricos por simetría:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}_m(x')\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}_m(x')\times\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

Tomando el rotacional de esta última expresión, y aplicando la identidad

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

se obtiene

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times(\vec{j}_m(x')\times\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' = \tag{24}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}_m(x')\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\vec{j}_m(x')\cdot\nabla'\right]\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' \tag{25}$$

Suponiendo esto válido, usando que las corrientes magnéticas puedan también variar con el tiempo, y la representación de la función delta

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

podemos usar la generación de la corriente magnética para distribuciones de carga magnética variables en el tiempo, y la ecuación de continuidad para la carga magnética. Formalmente:

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\int\vec{j}_m(\vec{x}',t)\delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_m(t,\vec{x}')\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' \tag{26}$$

y

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{27}$$

que es una de nuestras ecuaciones de Maxwell con dualidad electromagnética. Finalmente, buscamos una rotación de dualidad que nos lleve al mundo eléctrico del espacio de carga, donde $\vec{j}_m = \vec{0}$, es decir, buscamos una rotación de dualidad tal que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{0} \end{pmatrix} \leftrightarrow AJ = J' \tag{28}$$

Invirtiendo la transformación

$$\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta c\vec{j}_e \\ \sin\theta \vec{j}_e \end{pmatrix} \tag{29}$$

Estas ecuaciones implican

$$c\vec{j}_e = \cos\theta c\vec{j}_e \tag{30}$$

$$\vec{j}_m = \sin\theta \vec{j}_e \tag{31}$$

o bien

$$\frac{c\vec{j}_e}{\vec{j}_m} = \frac{1}{\tan\theta} c \rightarrow \vec{j}_m = \tan\theta \vec{j}_e \tag{32}$$

o, si hacemos $c\vec{j}_e \rightarrow \vec{j}_e = \vec{j}'_e$,

$$\vec{j}_m = c\tan\theta \vec{j}_e \tag{33}$$

Todo esto significa que para un valor fijo de θ, no necesariamente uno particular sino cualquier valor fijo, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell de forma que estén siempre escritas en el "mundo eléctrico", sin cargas magnéticas (monopolos) ni corrientes magnéticas debidas a los mismos. Simplemente, hay que ajustar el valor fijo (incluso aunque sea arbitrario) y siempre podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell sin monopolos usando dicha rotación abstracta. Para un ángulo de mezcla es fácil probar que

$$\vec{j}_m = c\vec{j}_e \tan\theta \tag{34}$$

$$\rho_m = c\rho_e \tan\theta \tag{35}$$

Demostración.

$$\star \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_e \tan\theta \end{pmatrix} \tag{36}$$

y entonces

$$\star \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho_e + \sin\theta c\rho_e \tan\theta \\ -\sin\theta c\rho_e + \cos\theta \rho_e \tan\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho_e \cos\theta + \sin\theta c\rho_e \tan\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

de donde

$$\star\begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} c\rho_e\cos^2\theta + \sin^2\theta\tan\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c\rho_e}{\cos\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Y por otro lado, para las corrientes,

$$\star\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ c\vec{j}_e\tan\theta \end{pmatrix} = \tag{39}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta c\vec{j}_e + \sin\theta c\vec{j}_e\tan\theta \\ -\sin\theta c\vec{j}_e + \cos\theta c\vec{j}_e\tan\theta \end{pmatrix} \tag{40}$$

de donde

$$\star\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta c\vec{j}_e + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}c\vec{j}_e \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} \cos^2\theta c\vec{j}_e + \sin^2\theta c\vec{j}_e \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c\vec{j}_e}{\cos\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Q.E.D.
En síntesis, la dualidad, manteniendo una razón constante entre cargas eléctricas y magnéticas de forma fija, permanece como una simetría oculta ya que $\rho_m, \vec{j}_m$ no aparecen en las ecuaciones transformadas porque dan lugar a

$$\star\begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \frac{c\rho_e}{\cos\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

y

$$\star\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} = \frac{c\vec{j}_e}{\cos\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

que no es otra cosa que la generalización de la dualidad para cargas y corrientes. De hecho, invirtiendo las ecuaciones de dualidad se puede escribir

$$\vec{E} = \star\vec{E}\cos\theta - c\sin\theta\star\vec{B} \tag{44}$$

$$c\vec{B} = \star\vec{E}\sin\theta + \cos\theta\star c\vec{B} \tag{45}$$

$$c\rho_e = \cos\theta c\rho_e - \sin\theta\star\rho_m \tag{46}$$

$$\rho_m = \sin\theta c\rho_e + \cos\theta\star\rho_m \tag{47}$$

$$c\vec{j}_e = \cos\theta c\vec{j}_e - \sin\theta\star\vec{j}_m \tag{48}$$

$$\vec{j}_m = \sin\theta c\vec{j}_e + \cos\theta\star\vec{j}_m \tag{49}$$

o equivalentemente en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \star\vec{E} \\ \star c\vec{B} \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star c\rho_e \\ \star\rho_m \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} c\vec{j}_e \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star c\vec{j}_e \\ \star\vec{j}_m \end{pmatrix} \tag{52}$$

3. Inobservabilidad de monopolos y diones

La inobservabilidad de los monopolos magnéticos y de las partículas con ambas cargas (eléctrica y magnética), llamadas diones, implica tomando divergencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \cos\theta \nabla \times \vec{E} - c\sin\theta \nabla \cdot \star\vec{B} \tag{53}$$

Pero como

$$\nabla \cdot \star\vec{E} = \star\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_e}{\cos\theta\varepsilon_0} \tag{54}$$

$$\nabla \cdot \star\vec{B} = \mu_0 \star \rho_m = \mu_0 \cdot 0 = 0 \tag{55}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \cos\theta\frac{\rho_e}{\cos\theta\varepsilon_0} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \tag{56}$$

$$\nabla \cdot \star\vec{B} = \mu_0 \star \rho_m = \star\mu_0\rho_m = \star\nabla \cdot \vec{B} \tag{57}$$

y así

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \tag{58}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{59}$$

Similarmente, tomando el rotacional a los campos y sus duales

$$\nabla \times \vec{E} = \cos\theta(\nabla \times \star\vec{E}) - c\sin\theta\nabla \times (\star\vec{B}) \tag{60}$$

$$\nabla \times \star\vec{E} = \star\nabla \times \vec{E} = -\star\mu_0\vec{j}_m - \star\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{61}$$

$$\nabla \times \star\vec{B} = \star\nabla \times \vec{B} = \star\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \star\mu_0\vec{j}_e \tag{62}$$

o bien

$$\nabla \times \vec{E} = \mu_0\vec{j}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{63}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}_e \tag{64}$$

Con nuestra elección de transformación general de dualidad, resulta que $\vec{j}_m = c\tan\theta\vec{j}_e$. Así, $\star\vec{j}_m = \star c\tan\vec{j}_e$. Entonces:

$$\nabla\times\vec{E} = \cos\theta\left(-\star\,\mu_0 c\tan\theta\vec{j}_e - \star\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - c\sin\theta\left(\star\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \star\mu_0\vec{j}_e\right) = \tag{65}$$

$$= -\star\,\mu_0 c\sin\theta\vec{j}_e - \star\cos\theta\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - c\sin\theta\star\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - c\sin\theta\star\mu_0\vec{j}_e = \tag{66}$$

$$= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\star\left(\cos\theta\vec{j}_m + \sin\theta c\vec{j}_e\right) \tag{67}$$

Usando las ecuaciones de Maxwell y las dualidades

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\left[\cos\theta(-c\vec{j}_e\sin\theta) + \cos^2\theta\vec{j}_m + c\sin\theta\cos\theta\vec{j}_e + \sin^2\vec{j}_m\right] \tag{68}$$

o bien

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\vec{j}_m \tag{69}$$

Para nuestra transformación de dualidad que elegimos $\vec{j}_m = \vec{0}$. Luego tenemos que

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{70}$$

y

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}_e \tag{71}$$

4. Monopolos y cuantización de Dirac

Usando argumentos mecanocuánticos agregados a las ecuaciones de Maxwell con dualidad, P. A. M. Dirac dedujo que la cuantización del flujo magnético y de la fase cuántica bajo transformación de dualidad, implica que si queremos una teoría cuántica bien definida, la carga eléctrica y magnética no pueden tomar cualquier valor, sino que, en unidades gaussianas

$$\frac{Q_e Q_m}{\hbar c} = \frac{n}{2}$$

o en unidades del S.I.

$$\frac{q_e q_m}{2\pi\hbar} = N$$

donde Q_e, q_e son cargas eléctricas, Q_m, q_m las cargas magnéticas, y N, n números enteros. $\hbar = h/2\pi$. También, la fuerza general de un dión se escribe

$$\vec{F} = \frac{e_1 g_2 + e_2 g_1}{r^3}\vec{r} + \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)\frac{\vec{v}}{c}\times r}{r^3} \tag{72}$$

Además, se puede estimar la masa mínima de un monopolo mediante la relación

$$M_m = \frac{g_D^2}{e^2}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\frac{1}{4\alpha_e}m_e \approx 4692 m_e \tag{73}$$

donde

$$g_D = \frac{e}{2\alpha_e} = \frac{137e}{2} \tag{74}$$

5. Otras dualidades electromagnéticas

Las teorías de Gran Unificación o GUT(Grand Unified Theories) incluyen versiones superpesadas del monopolo de Dirac, con una masa del orden de $M_m(GUT) > 10^{16}GeV/c^2$. Los monopolos GUT podrían ser materia oscura, aunque son problemáticos en Cosmología, y también catalizar desintegraciones de protones.

En el caso de monopolos supersimétricos, existen la llamada cota BPS que permite estimar una cota inferior a su masa de forma teórica. Además, en teorías supersimétricas de cuerdas y branas, existe la relación dimensional entre branas y sus duales con la dimensión y el número de supersimetría máxima posible, mediante la relación siguiente en 10D:

$$2\kappa_{10}^2 \rho_{Dp}\rho_{D(6-p)} = 2\pi n \tag{75}$$

En teoría M y supergravedad maximal

$$2\kappa_{11}^2 T_{M2}T_{M5} = 2\pi n \tag{76}$$

y

$$D - d = \frac{1}{2}mn = \frac{MN}{4} \tag{77}$$

en general igualando grados fermiónicos y bosónicos (left y right). Además, también, para campos de alto espín existe una interesante generalización de la dualidad (extendible a diones gravitacionales y electromagnéticos):

$$\frac{1}{q!}Q^e_{a_1\cdots a_q}P^{(m)a_1\cdots a_q} = 2\pi\hbar N \tag{78}$$

Para $q = s-1$, con $s = 2$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi\hbar}Q_{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}}P^{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} \in \mathbb{Z} \to \frac{4GP_\gamma Q^\gamma}{\hbar} \in \mathbb{Z} \tag{79}$$

para

$$\frac{MN}{2\pi\hbar}f_{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}}f^{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} = n \tag{80}$$

con

$$\Delta\Psi = \frac{N}{\hbar}f_{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}}\int d^3x T^{0\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} = \frac{MN}{2\pi\hbar}f_{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}}f^{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} \tag{81}$$

6. Conclusión

Con esta introducción breve a la dualidad electromagnética en (3+1)d, hemos visto:

1. Dado un θ fijo, las ecuaciones se pueden transformar en las ecuaciones de Maxwell usuales. El ángulo θ mide cuánta carga eléctrica y magnética tiene la partícula.

2. El ángulo de mezcla de dualidad mide la fracción de carga magnética y eléctrica, así como la fracción de corriente magnética y corriente eléctrica.

3. Las partículas pueden tener carga magnética y eléctrica, llamándose diones (dyons) en tal caso.

4. La dualidad electromagnética es un útil teórico que permite explicar una ley fenomenológica como la ley de Faraday-Lenz.

5. La existencia de un solo monopolo magnético en el universo implica la cuantización de la carga eléctrica, que es un hecho empírico verificado (toda partícula cargada es múltiplo entero de una cantidad fundamental).

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2}$$

6. Existe una condición de diones debida a Julian Schwinger.

$$\left(\frac{e_1 g_2 - e_2 g_1}{2\pi\hbar c}\right) = n$$

7. No hay evidencia experimental aún de la existencia de monopolos magnéticos o diones.

8. Las teorías GUT incluyen de forma natural versiones superpesadas de monopolos magnéticos, llamados monopolos GUT. Pueden catalizar desintegración de protones o incluso podrían ser candidatos a materia oscura, pero suponen en general un problema cosmológico.

9. La dualidad electromagnética puede ser extendida al sector gravitacional, aunque es menos conocido, incluyendo los campos de alto espín.

$$\frac{MN}{2\pi\hbar} f_{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} f^{\gamma_1\cdots\gamma_{s-1}} = \frac{Q_E^{(e)} Q^{(m)M}}{2\pi\hbar} = n$$

donde E, M son multiíndices de espín $(E, M) = a_1, \cdots, a_q = \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-1}$.